SUJET 1

EXERCICE 1

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0 \;\; et \;\; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. a) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), construire la courbe représentative (C) de la fonction $x \longmapsto \sqrt{2+x}$, ainsi que la droite (D) d'équation y = x.

b) En déduire une construction des 4 premiers termes de la suite (u_n). Conjecturer le sens de variation et la convergence de cette suite.

2. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 2$. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = 2 - u_n$.

a) Quel est le signe de v_n?

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$, puis établir par récurrence que :$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c) En déduire la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

EXERCICE 2

On définit la fonction f sur $]0; +\infty[$ par : f(x) = $\frac{ln(1+x) - x}{x}$

1. Démontrez que f peut être prolongée par continuité en 0. Définir ce prolongement notée g.
2. a. Pour x≥ 0, *on pose* h(x) = $\frac{x}{1+x} - \; ln(1+x)$

   Etudiez le sens de variation de h puis déduisez-en le signe de h(x).

   b. Démontrez que g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que pour x> 0, $g'(x)$ a le signe de h(x).

   c. Déduisez-en les variations de g sur $[0; +\infty[$.

3. a. Montrez, en utilisant des fonctions judicieusement choisies, que pour x$>$ 0, $x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

   b. Déduisez-en que g est dérivable à droite de 0 et que $g'(0) = \frac{-1}{2}$.

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, tracez la courbe C_f, représentative de f ainsi que sa demi-tangente au point d'abscisse 0.

EXERCICE 3

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé direct (o ; I ; J) soit les points : A(2 ;0) ; B(-2 ; 2) ; C(0 ; 1) ; D(-3 ; 0)

1)a)Déterminer l'expression complexe de la rotation R vérifiant : R(A)=B et R(C)=D .

b) Donner les éléments caractéristiques de R.

SUJET 2

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = lnx - \frac{lnx}{x^2}$

1)a)Déterminer l'ensemble de définition D de f .

b) Déterminer les limites de f aux bornes de f .

2)a)Déterminer la fonction dérivée de f .

b) On considère la fonction g définie par $g(x) = x^2 - 1 + 2\ln x$.

Etudier le sens de variation de g et calculer g(1). En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x .

c) Dresser le tableau de variation de f .

EXERCICE 2

On se propose de déterminer les racines quatrièmes de $a = -7 - 24i$.

a) Vérifier que $a = (1 + 2i)^4$.

b) Justifier que si z est une racine quatrième de a , alors $\left(\frac{z}{1+2i}\right)^4 = 1$.

c) Utiliser les racines quatrièmes de l'unité pour déterminer sous forme algébrique les racines quatrièmes de a.

EXERCICE 3

On considère les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$.

1) Quelle est la dérivée de la fonction tangente ? Calculer I.
2) Soit f la fonction ; $f : \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

Démontrer que f est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ et que pour tout x appartenant à cet intervalle $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

En déduire du calcul précédent une relation entre I et J , puis calculer J.

EXERCICE 4

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 0$.
2) Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction $g: x \longmapsto ax + b$ soit solution de l'équation différentielle (E') : $y'' + 4y' + 4y = -4x$.
3) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E') si et seulement si $f - g$ est solution de (E).
4) En déduire la solution f sur $\mathbb{R}$ de (E') telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$

SUJET 3

EXERCICE

Dans le plan muni d'un repère $(O; I; J)$ orthonormal , on considère les quatre points suivants : A$(-2; 3)$; B$(2; 1)$;C$(2; 4)$; D$(5; 2)$.

1) Justifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.
2) Déterminer les coordonnées du point M intersection des droites (AB) et (CD) .
3) Déterminer les coordonnées de l'unique point B′ vérifiant que le point M soit le milieu du segment $[BB']$.
4) Justifier que la droite (CD) est la médiatrice du segment $[BB']$.

PROBLEME

1) Soit la fonction polynôme P définie par : $P(x) = 3x^3 - x - 2$.
   a) Vérifier que $P(1) = 0$. Déterminer les nombres réels a , b et c tels que pour tout x : $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
   b) Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

2) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - x + 1 - 2lnx$.

   a) Déterminer la dérivée g' de g.En déduire le sens de variation de g en utilisant 1).

   b) Déduire de a) le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3) Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \frac{x + lnx}{x^2}$.

   On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique 2cm).

   a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + lnx}{x^2} = 0$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) Justifier que les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $x = 0$ et $y = x + 1$ sont asymptotes à la courbe (C).
   c) Démontrer que la fonction h telle que $h(x) = x + lnx$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et que cette fonction prend des valeurs positives et négatives.
      En déduire que (Δ) coupe (C) en un point unique d'abscisse α vérifiant $\alpha + ln\alpha = 0$.
      Démontrer que $0.56 < \alpha < 0.57$.
   d) Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ).
   e) Etudier les sens de variation de f. En déduire l'existence d'une valeur β unique telle que $f(\beta) = 0$.
      Démontrer que $0.46 < \beta < 0.47$.

f) Construire (C) et (Δ).

SUJET 4

EXERCICE 1

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère les intégrales : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin(x)\,dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos(x)\,dx$

1) Calculer I_o et J_0.
2) Soit n un entier naturel non nul.
   a) En intégrant par partie I_n puis J_n prouver que I_n et J_n vérifient le système :
   $$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \end{cases}$$
   b) En déduire pour tout n entier naturel non nul les expressions de I_n et J_n en fonction de n.
3) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

EXERCICE 2

1/ On considère le polynôme P de la variation complexe z défini par :
$P(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}$.
a) Montrer que l'équation P(z) = 0 admet une solution imaginaire pure Z_o
b) Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait $P(z) = (z - z_o)(z^2 + az + b)$.
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : P(z) = 0
2/ Le plan complexe est rapporté à un repère orthogonal direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1cm pour unité graphique.
a) Placer les points A B et I d'affixes respectives $z_A = -7 + 5i$; $z_B = -7 - 5i$ et $z_I = i\sqrt{2}$.
b) Déterminer l'affixe de l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
c) Placer le point C d'affixe $z_C = 1 + i$. Déterminer l'affixe du point N tel que ABCN soit un parallélogramme.
d) Placer le point D d'affixe $z_D = 1 + 11i$. Calculer $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. Que peut-on dire des droites (AC) et (BD). En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

EXERCICE 3

1) Résoudre le système suivant, où u et v sont des nombres réels :

$$\begin{cases} u + \frac{1}{2}v = 0 \\ u - \frac{1}{2}v = \frac{3}{2} \end{cases}$$

2) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ae^x + \frac{b}{e^x+1}$ $(a \text{ et } b \text{ réels})$

Trouver les valeurs des réels a et b, sachant que la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ passe par O et que la tangente à la courbe en ce point est parallèle à la droite (Δ) d'équation $y = \frac{3}{2}x - 2$.

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - \frac{2}{e^x+1}$.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) \geq 1$.